

## **Conducción estacionaria en dos dimensiones**

Hasta ahora hemos esbozado las principales soluciones para el caso de conducción estacionaria en una dimensión. La incorporación de una segunda dimensión determina que para el caso más sencillo; es decir contemplando conductividad térmica constante y ausencia de generación de calor. La ecuación a resolver en el caso de coordenadas cartesianas, corresponde a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0$$

En general lo método para acometer la solución de esta ecuación diferencial, los podemos distinguir entre métodos analíticos y métodos numéricos. Dentro de los métodos analíticos, podemos mencionar: el método de **separación de variables** y **análisis de Fourier, transformada de Laplace**, entre otros. Las metodologías numéricas más empleadas corresponden al método de las **diferencias finitas**, el método de los **volúmenes finitos de control** y el método de los **elementos finitos**.

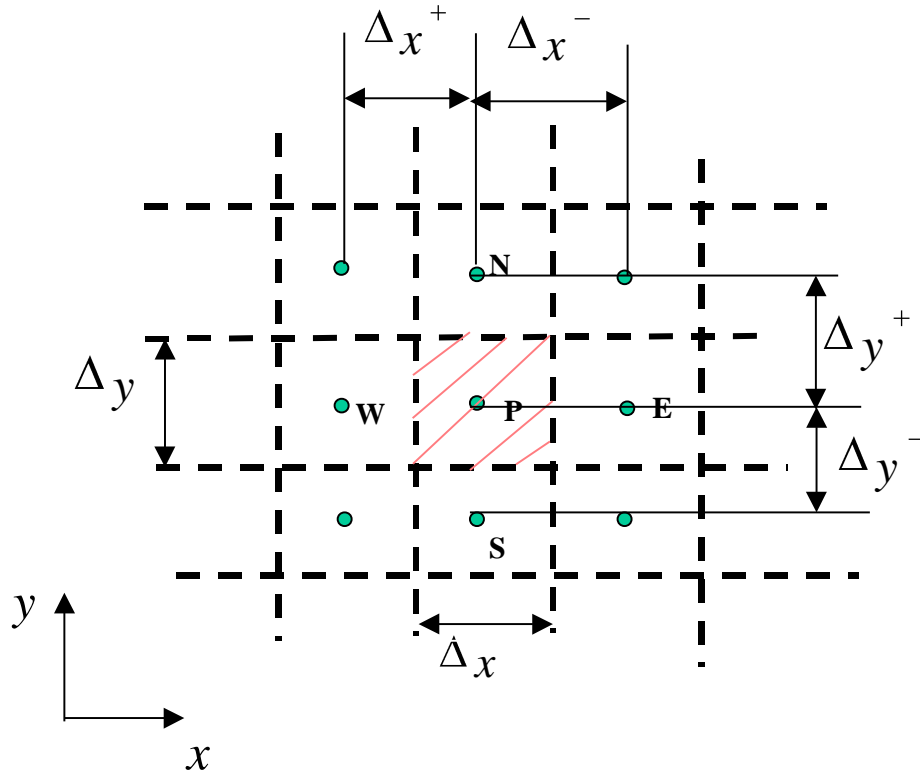
Invitamos al lector, a revisar el material que aparece en el libro de texto relativo a las metodologías analíticas.

A continuación, realizaremos la presentación del método de los volúmenes finitos de control en 2-D.

### **Método de los volúmenes finitos de control en 2-D.**

Ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{dT}{dy} \right) + S_p T + S_c = 0$$



multiplicando la ecuación por el diferencial de área y procediendo a integrar sobre el volumen finito e control mostrado en la figura.

$$\int_{s}^e \int_{w}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{w}^s \int_{s}^e \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx + \int_{w}^s \int_{s}^e S_p T + S_c \overline{d} y dx = 0$$

La discretización se prosigue de la manera siguiente, empezaremos por el termino conductivo en x.

$$\int_{s}^e \int_{w}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy = \left( k_e \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - k_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \right) \Delta y$$

esta primera integración es exacta, la aproximación se refiere a la discretización de las derivadas mediante:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x^+}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x^-}$$

sustituyendo estas expresiones se obtiene:

$$\int\int_{s w}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy \approx \left( k_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x^+} - k_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x^-} \right) \Delta y$$

en forma similar se puede demostrar que el termino conductivo en la dirección y, se puede discretizar mediante:

$$\int\int_{w s}^e \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx \approx \left( k_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y^+} - k_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y^-} \right) \Delta x$$

Finalmente, el termino de fuente puede ser discretizado con ayuda del teorema del valor medio para una integral,

$$\int\int_{s w}^n \left( S_p T + S_c \right) dx dy \approx \left( S_p T_P + S_c \right) \Delta x \Delta y$$

Sustituyendo las expresiones discretizadas en la ecuación original se obtiene:

$$\left( k_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x^+} - k_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x^-} \right) \Delta y + \left( k_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y^+} - k_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y^-} \right) \Delta x + \left( S_p T_P + S_c \right) \Delta x \Delta y = 0$$

que en forma canónica se puede expresar mediante:

$$a_p T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$a_N = \frac{k_n \Delta x}{\Delta y^+}$$

$$a_S = \frac{k_s \Delta x}{\Delta y^-}$$

$$a_E = \frac{k_e \Delta y}{\Delta x^+}$$

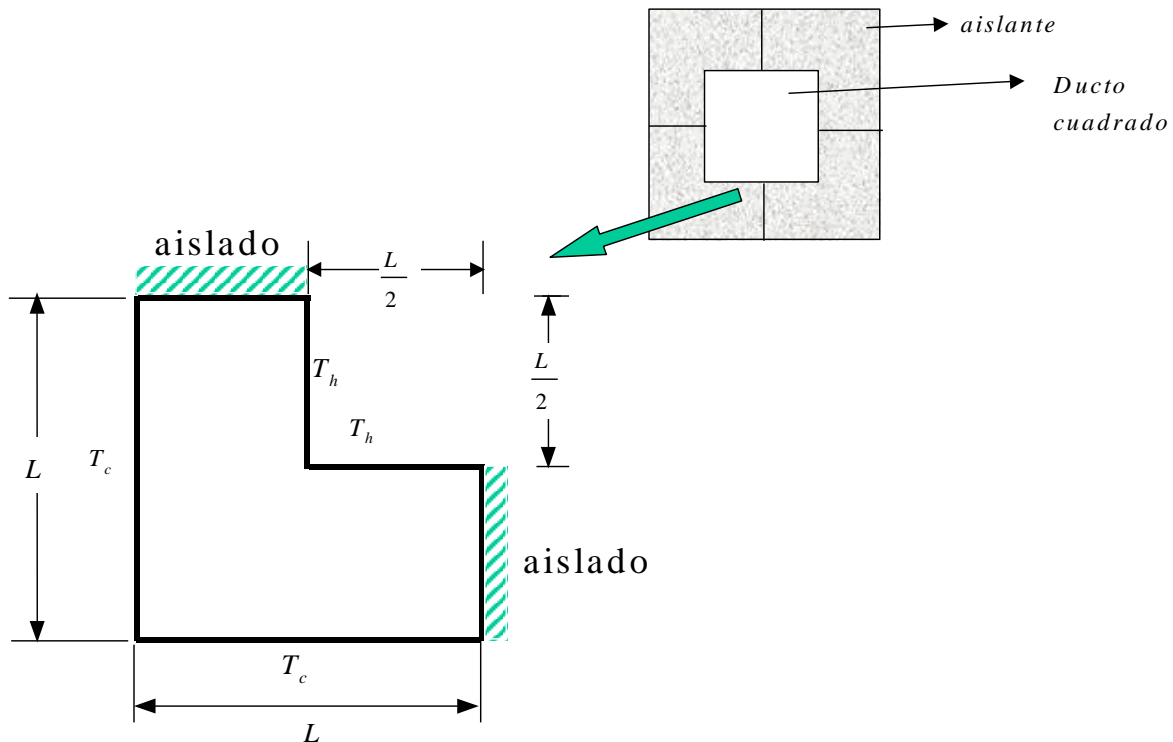
$$a_W = \frac{k_w \Delta y}{\Delta x^-}$$

$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_W - S_p \Delta x \Delta y$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y$$

La metodología de los volúmenes finitos de control en el caso de dos dimensiones puede ser acometida con el uso de las computadoras, mediante el cálculo sistemático de los coeficientes de influencia, (a's) y la solución del sistema de ecuaciones emergentes de la discretización. Para el cálculo manual, cuando se trata de un número reducido de volúmenes finitos de control, es preferible utilizar un procedimiento alternativo, que se fundamenta en el balance de energía en cada uno de los volúmenes finitos de control que se emplea en la discretización. Este procedimiento alternativo es ilustrado mediante el siguiente ejemplo.

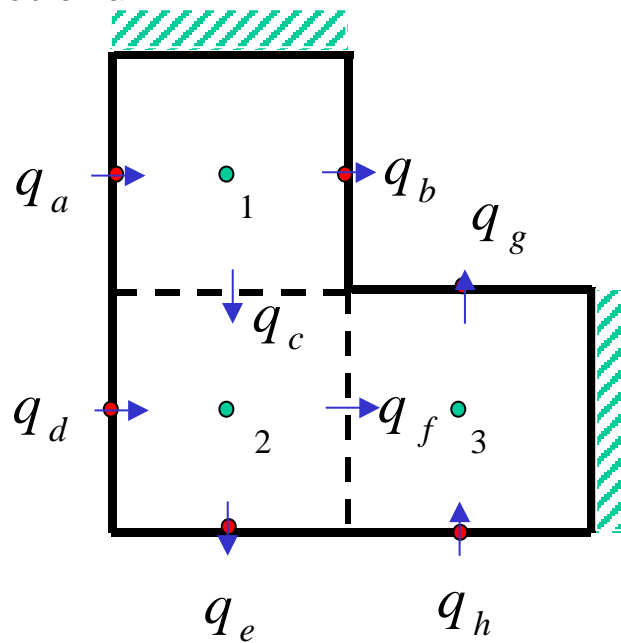
Ejemplo. La sección mostrada en la figura es un componente básico del aislamiento que se encuentra alrededor de un ducto cuadrado, cuyas partes superior izquierda e inferior derecha están perfectamente aisladas. La superficie interna es isotérmica y se encuentra a una temperatura,  $T_h = 20^\circ C$  y la superficie externa es isotérmica y se encuentra a una temperatura,  $T_c = 0^\circ C$ . El diseño está caracterizado por  $k = 0,5 W / mK$  y  $L = 20 cm$ . Empleando el método de los volúmenes finitos de control, calcule la distribución de temperaturas y la transferencia de calor desde  $T_h$  a  $T_c$ .



Datos:  $T_h = 20^\circ C$ ,  $T_c = 0^\circ C$ ,  $L = 0,20 m$ ,  $k = 0,5 W / mK$

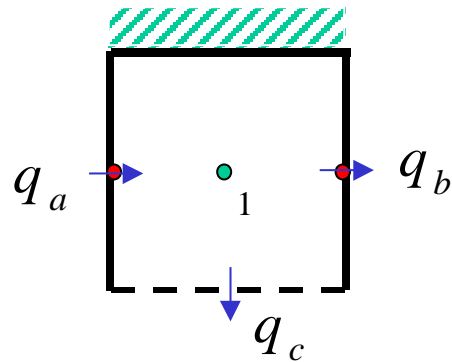
Solución:

A continuación se muestra la discretización empleada para la resolución del problema:



Sobre la discretización; aprovecharemos la simetría térmica que presenta el problema, la cual determina que  $T_1 = T_3$ .

**Balance de energía sobre el Volumen de control 1**



El balance de energía sobre el volumen de control 1, establece:

$$q_a - q_b - q_c = 0$$

donde :

$$q_a \approx kA_a \frac{(T_c - T_1)}{\frac{L}{4}}$$

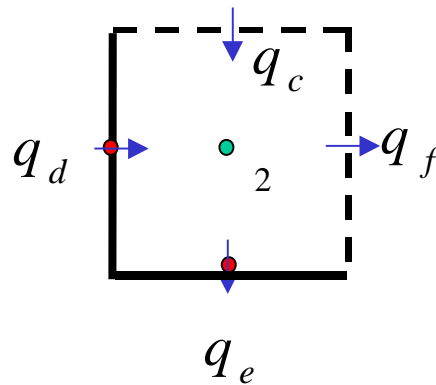
$$q_b \approx kA_b \frac{(T_1 - T_h)}{\frac{L}{4}}$$

$$q_c \approx kA_c \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{2}}$$

que al realizar la sustitución por los valores numéricos determina:

$$kA \left( \frac{0 - T_1}{0,05} - \frac{T_1 - 20}{0,05} - \frac{T_1 - T_2}{0,1} \right) = 0$$

### ***Balance de energía sobre el Volumen de control 2***



El balance de energía sobre el volumen de control 2, establece:

$$q_c + q_d - q_f - q_e = 0$$

donde :

$$q_d \approx kA_d \frac{(T_c - T_2)}{\frac{L}{4}}$$

$$q_f \approx kA_f \frac{(T_2 - T_1)}{\frac{L}{2}}$$

$$q_e \approx kA_e \frac{(T_2 - T_c)}{\frac{L}{4}}$$

que al realizar la sustitución por los valores numéricos determina:

$$kA \left( \frac{0 - T_2}{0,05} + \frac{T_1 - T_2}{0,1} + \frac{0 - T_2}{0,05} - \frac{T_2 - T_1}{0,1} \right) = 0$$

Resolviendo el sistemas de dos ecuaciones con dos incognitas, se obtiene:

$$T_1 = 8,5714 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 2,8571 \text{ } ^\circ\text{C}$$

El calor transferido entre  $T_c$  y  $T_h$ , se puede determinar mediante un balance de calor global, el cual establece :

$$q_{c-h} = 4 q_a + q_d - q_e + q_h -$$

o también, por:

$$q_{c-h} = 4 q_b + q_g = 8q_b$$

Es indudable que la última expresión, es más sencilla de evaluar, en consecuencia;

$$q_{c-h} = 8q_b = 8kA_b \frac{(T_1 - T_h)}{\frac{L}{4}} = 8 \cdot 0,5 \cdot 0,10 \cdot \frac{8,5714 - 20}{\frac{0,20}{4}} = 91,42 \text{ W / m}$$